দ্বিপদী উপপাদ্য

গাণিতিক উপপাদ্য

প্রাথমিক বীজগণিতে, **দ্বিপদী উপপাদ্য** (বা **দ্বিপদী বিস্তার**) একটি দ্বিপদী রাশির সূচকের বীজগাণিতিক সম্প্রসারণ বর্ণনা করে। এই উপপাদ্য অনুযায়ী, একটি $(x+y)^n$ আকারের বহুপদীকে কয়েকটি ax^by^c আকারের রাশির সমষ্টি রূপে প্রকাশ করা সম্ভব, যেখানে b এবং c সূচকদ্বয় প্রত্যেকে অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা ও $b+c=n$, এবং প্রতিটি রাশির সহগ a একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা যার মান n ও b এর উপর নির্ভর করে। উদাহরণস্বরূপ, $n = 4$ এর জন্য-

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}
$$

প্যাসকেল ত্রিভুজে দ্বিপদী সহগ $\binom{n}{b}$ হচ্ছে n-তম সারির b-তম পদ (গণনা শুরু হয় 0 থেকে)। প্রতিটি পদ হচ্ছে তার উপরের দুটি পদের সমষ্টি।

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

ax^by^c রাশিতে a সহগটি দ্বিপদী সহগ $\binom{n}{b}$ বা $\binom{n}{c}$ নামে পরিচিত (দুটির মান একই)। পরিবর্তনশীল n এবং b এর জন্য এই সহগগুলোর মান প্যাস্কেলের ত্রিভূজ থেকে নির্ণয় করা যায়। এই সংখ্যাগুলো গুচ্ছ-বিন্যাসতত্ত্বেও পাওয়া যায়, যেখানে $\binom{n}{b}$ হচ্ছে n-সংখ্যক উপাদানের সেট থেকে b সংখ্যক উপাদানের সমাবেশের সংখ্যা। $\binom{n}{b}$ পদটিকে পড়া হয় "এন চুজ বি" (*n* choose *b*)।[১]

ইতিহাস

দ্বিপদী উপাপাদ্যের বিভিন্ন বিশেষ অবস্থা কমপক্ষে খ্রিষ্টপূর্ব চতুর্থ শতাব্দীর আগে থেকেই প্রচলিত ছিল। গ্রিক গণিতবিদ ইউক্লিড দ্বিতীয় সূচকের ক্ষেত্রে দ্বিপদী উপপাদ্যের উল্লেখ করেছিলেন।[২][৩] ছয়শত খ্রিষ্টাব্দেও ভারতে তৃতীয় সূচকের দ্বিপদী উপপাদ্যের প্রচলন থাকার প্রমাণ পাওয়া যায়।[২][৩]

দ্বিপদী সহগগুলোকে *k* সংখ্যক বস্তুর মধ্যে *n* সংখ্যক বস্তুর সমাবেশের সংখ্যার দ্বারা প্রকাশের বিষয়টি প্রাচীন ভারতীয় গণিতবিদদের আগ্রহের বিষয় ছিল। এই সমাবেশ সংক্রান্ত সমস্যার প্রথম সূত্র পাওয়া যায় ভারতীয় গীতিকার পিঙ্গল (খ্রিষ্টপূর্ব ২০০) রচিত *চন্দশাস্ত্র* গ্রন্থে, যেখানে এর সমাধানের একটি উপায়ের উল্লেখ ছিল। [৪]:২৩০ দশম শতকের ভাষ্যকার হালায়ুধা এই পদ্ধতিটি ব্যাখ্যা করেন যা বর্তমানে প্যাসকেলের ত্রিভুজ নামে পরিচিত। [৪] ষষ্ঠ শতকের মধ্যে ভারতীয় গণিতবিদগণ সম্ভবত এটিকে $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ অনুপাত হিসেবে প্রকাশ করতে জানতেন,[৫] এবং এই নীতিটির একটি পরিষ্কার বিবৃতি পাওয়া যায় দ্বাদশ শতাব্দীর ভাস্করের *লীলাবতী* লিপিতে। [৫]

জানামতে দ্বিপদী উপপাদ্যের প্রথম প্রতিপাদন ও দ্বিপদী সহগের তালিকা পাওয়া যায় আল-করাজির একটি কাজে যা আল-সামাও'য়াল তার "আল-বাহির" এ উল্লেখ করেন।.[৬][৭][৮] আল-করাজি দ্বিপদী সহগের ত্রিভুজাকার বিন্যাস বর্ণনা করেন [৯] এবং গাণিতিক আরোহ বিধির একটি প্রাচীন আকার ব্যবহার করে দ্বিপদী উপপাদ্য ও প্যাসকেলের ত্রিভুজের একটি গাণিতিক প্রমাণ প্রদান করেন। [৯] পার্সি কবি ও গণিতবিদ ওমর খৈয়াম সম্ভবত উচ্চমাত্রার সূত্রটির সাথে পরিচিত ছিলেন, যদিও তার অনেক গাণিতিক অবদান হারিয়ে গিয়েছে। [৩] ইয়াং হুই [১০] ও চু শিহ-চিয়েহ [৩] এর ত্রয়োদশ শতকের গাণিতিক কাজে অল্প মাত্রার দ্বিপদী বিস্তৃতি সম্পর্কে জানা যায়। ইয়াং হুই এই পদ্ধতিটি আরও প্রাচীন একাদশ শতকের জিয়া জিয়ান এর লিপিতে উল্লেখ করেন, যদিও সেই লিপিগুলো এখন হারিয়ে গিয়েছে। [৪]:১৪২

১৫৪৪ সালে, মিখায়েল স্টিফেল "দ্বিপদী সহগ" পদটির সূচনা করেন এবং দেখান যে কি করে প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে $(1+a)^n$ কে $(1+a)^{n-1}$ এর সাপেক্ষে প্রকাশ করা যায়। [১১] ব্লেইস প্যাসকেল তার *Traité du triangle arithmétique* (১৬৫৩) গ্রন্থে তার নামাঙ্কিত ত্রিভুজটি নিয়ে আলোচনা করেন। তবে, এই সংখ্যাগুলোর বিন্যাস ইতোমধ্যেই রেনেসাঁর শেষদিকে ইউরোপীয় গণিতবিদের মধ্যে পরিচিত ছিল, যাদের মধ্যে স্টিফেল, নিকোলো ফন্টানা টারটাগিলা ও সাইমন স্টেভিন অন্তর্ভুক্ত। [১১]

সাধারণত আইজ্যাক নিউটনকে সাধারণীকৃত দ্বিপদী উপপাদ্যের কৃতিত্ব দেয়া হয়, যা যে কোন মূলদ সূচকের জন্য প্রযোজ্য। [১১][১২]

উপপাদ্যের বিবৃতি

দ্বিপদী উপপাদ্য অনুসারে, $x + y$ দ্বিপদী রাশিটির যেকোনো ঘাত নিম্নোক্ত আকারে প্রকাশ করা যায়

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n$$

যেখানে প্রতিটি $\binom{n}{k}$ হচ্ছে একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা যা দ্বিপদী সহগ নামে পরিচিত। (একটি সূচকের মান শুন্য হলে, এর সংশ্লিষ্ট মানকে 1 ধরা হয় এবং এই গুণনীয়কটি প্রায়ই পদ থেকে বাদ দেয়া হয়। এর ফলে ডানপক্ষকে প্রায়ই $\binom{n}{0}x^n + \ldots$) আকারে লেখা হয়। এই সূত্রটি **দ্বিপদী সূত্র** অথবা **দ্বিপদী অভেদ** নামেও পরিচিত। সমষ্টি চিহ্ন ব্যবহার করে এটিকে লেখা যায়

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

প্রথম বিস্তৃতিতে চূড়ান্ত রাশিটি এর পূর্বের রাশিটিকে x এবং y এর প্রতিসমতার মাধ্যমে অনুসরণ করে, এবং তুলনামূলকভাবে দেখা যায় যে দ্বিপদী সহগের বিন্যাসক্রম প্রতিসম হয়। দ্বিপদী উপপাদ্যের একটি সরল ভিন্নতা পাওয়া যায় y এর স্থলে 1 কে প্রতিস্থাপিত করে, যার ফলে এতে শুধুমাত্র একটি চলকের অস্তিত্ব থাকে। এইভাবে সূত্রটিকে লেখা যায়

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n,$$

যা এভাবেও লেখা যায়-

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

উদাহরণ

দ্বিপদী উপপাদ্যের সবচেয়ে সরল উদাহরণ হচ্ছে $x + y$ এর বর্গের সূত্র:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

এই রাশিটিতে অবস্থিত দ্বিপদী সহগ 1, 2, 1 এর মানগুলো প্যাস্কেলের ত্রিভুজের দ্বিতীয় সারি থেকে পাওয়া যায় (পাস্কেলের ত্রিভুজের সর্ব উপরের "1" টিকে শুন্যতম সারি হিসেবে ধরা হয়)। দ্বিপদীর উচ্চতর ঘাতের ক্ষেত্রে

দ্বিপদী সহগের মানসমূহ ত্রিভুজের নিচের সারি থেকে পাওয়া যায়:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4,$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5,$$

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6,$$

$$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$$

এই উদাহরণ গুলো থেকে কয়েকটি প্যাটার্ন দেখা যায়। সাধারণভাবে $(x + y)^n$ পদটির ক্ষেত্রে:

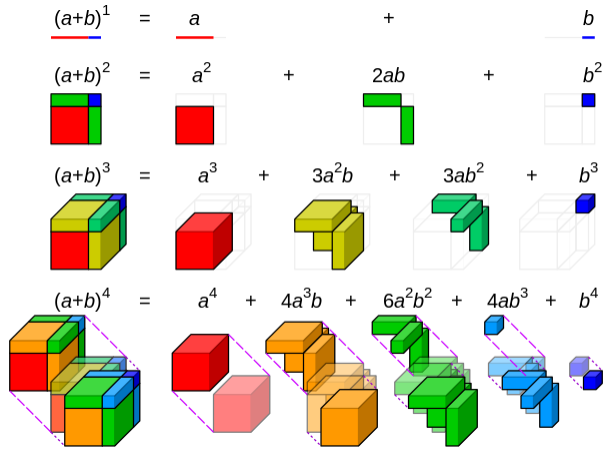
1. x এর ঘাত শুরু হয় n থেকে এবং 0 তে না পৌঁছানো পর্যন্ত 1 করে কমতে থাকে।(যেখানে $x^0 = 1$, প্রায়ই লেখা হয় না);
2. y এর ঘাত শুরু হয় 0 থেকে এবং n তে না পৌঁছানো পর্যন্ত 1 করে কমতে থাকে;
3. দ্বিপদী উপপাদ্যের বিস্তৃত পদগুলো এইভাবে সাজানো হলে পাস্কেলের ত্রিভুজের nতম সারির পদগুলো তাদের সহগের মান নির্দেশ করে;
4. একইরকম পদগুলো সমষ্টির পূর্বে বিস্তৃতির পদের সংখ্যা হচ্ছে সহগগুলোর যোগফল এবং 2^n এর সমান; এবং
5. বিস্তৃতির একইরকম পদগুলো সমষ্টির পর এতে $n + 1$ সংখ্যক পদ থাকবে।

দ্বিপদী উপপাদ্যটি যেকোনো দুটি রাশির সমষ্টির ঘাত নির্ণয়ে ব্যবহৃত হতে পারে। উদাহরণস্বরূপ,

$$\begin{aligned}(x+2)^3 &= x^3 + 3x^2(2) + 3x(2)^2 + 2^3 \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8\end{aligned}$$

বিয়োগ সংক্রান্ত দ্বিপদী উপপাদ্যে সূত্রটি $(x - y)^n = (x + (-y))^n$ আকারে লেখা যায়। এর ফলে বিস্তৃতির প্রতিটি জোড় পদের চিহ্ন পরিবর্তিত হয়:

$$(x-y)^3 = (x+(-y))^3 = x^3 + 3x^2(-y) + 3x(-y)^2 + (-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

চতুর্থ সূচক পর্যন্ত দ্বিপদী উপপাদ্যের দৃশ্যকল্প

a এবং *b* এর ধনাত্মক মানের জন্য, $n = 2$ মানের দ্বিপদী উপপাদ্যে জ্যামিতিকভাবে প্রতীয়মান হয় যে, $a + b$ বাহুর দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট কোন বর্গকে *a* বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গ, *b* বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গ এবং *a* ও *b* বাহুবিশিষ্ট দুইটি আয়তক্ষেত্রে বিভক্ত করা যায়। $n = 3$ হলে, উপপাদ্য অনুসারে $a + b$ বাহুর দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি ঘনককে *a* বাহুবিশিষ্ট একটি ঘনক, *b* বাহুবিশিষ্ট একটি ঘনক, তিনটি $a \times a \times b$ মাত্রার আয়তাকার বাক্স এবং তিনটি $a \times b \times b$ মাত্রার আয়তাকার বাক্স পাওয়া যায়।

ক্যালকুলাসে, এই চিত্র থেকে অন্তরজের একটি জ্যামিতিক প্রমাণ পাওয়া যায় $(x^n)' = nx^{n-1}$[১৩] যদি ধরা হয় $a = x$ এবং $b = \Delta x$, *b* কে *a* এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তন ধরা হলে, এই চিত্রটি একটি *n*-মাত্রার অধিঘনক $(x + \Delta x)^n$, এর আয়তনের ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তন নির্দেশ করে, যেখানে রৈখিক পদটির (Δxএর সাপেক্ষে) সহগের মান nx^{n-1},প্রতিটি $(n-1)$মাত্রার *n* তলের উপরিতলের ক্ষেত্রফল:

$$(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots$$

এর মান ভাগফলের পার্থক্যের দ্বারা অন্তরজের সংজ্ঞায় বসিয়ে ও সীমার মধ্যে বিবেচনা করলে দেখা যায় যে $(\Delta x)^2$বা তার উচ্চমাত্রার রাশিগুলো উপেক্ষণীয় হয় এবং $(x^n)' = nx^{n-1}$সূত্রটি পাওয়া যায়, যা এভাবে ব্যাখ্যা করা যায়

> "একটি *n*-ঘনকের এক ধারের পরিবর্তনের ফলে এর আয়তনের ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের মান এর $(n-1)$-মাত্রার তলের *n*টির ক্ষেত্রফলের সমান"।

এই ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্যের প্রয়োগের অনুরূপ চিত্রটিকে একীভূত করা হলে ক্যাভালিরির বর্গীকরণ সূত্র $\int x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}x^n$সমাকলনটি পাওয়া যায় – আরও জানতে দেখুন ক্যাভালিরির বর্গীকরণ সূত্রের প্রমাণ [১৩]

দ্বিপদী সহগ

দ্বিপদী বিস্তৃতি থেকে প্রাপ্ত সহগসমূহকে **দ্বিপদী সহগ** বলা হয়। এগুলোকে সাধারণত $\binom{n}{k}$ লেখা হয় এবং পড়া হয় "এন চুজ বি" (*n* choose *b*)।

সূত্র

উপপাদ্যের $x^{n-k}y^k$ রাশিটির সহগ হল

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

যাকে ফ্যাক্টোরিয়াল ফাংশন *n!* এর সাপেক্ষে সংজ্ঞায়িত করা হয়। একইভাবে সূত্রটিকে লেখা যায় এইভাবে

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} = \prod_{\ell=1}^{k} \frac{n-\ell+1}{\ell} = \prod_{\ell=0}^{k-1} \frac{n-\ell}{k-\ell}$$

যেখানে, ভগ্নাংশটির লব ও হর উভয়েই *k* সংখ্যক পদ রয়েছে। উল্লেখ্য যে, এই সূত্রটিতে একটি ভগ্নাংশ অন্তর্ভুক্ত হলেও, দ্বিপদী সহগ $\binom{n}{k}$ প্রকৃতপক্ষে একটি পূর্ণসংখ্যা।

সমাবেশগত ব্যাখ্যা

দ্বিপদী সহগ $\binom{n}{k}$ কে বলা যায় *n* সংখ্যক উপাদানের সেট থেকে *k* সংখ্যক উপাদানের সমাবেশের সংখ্যা। এটি দ্বিপদীর সাথে নিম্নোক্ত কারণে সম্পর্কিত: যদি $(x + y)^n$ কে উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট করে লেখা হয়

$$(x+y)(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

তবে, বণ্টন বিধি অনুসারে, বিস্তৃতিতে শুধুমাত্র *x* অথবা *y* সম্পন্ন একটি পদ থাকবে যা প্রতিটি দ্বিপদী রাশি থেকে আসবে। উদাহরণস্বরূপ, সেখানে যদি প্রতিটি দ্বিপদী রাশি থেকে শুধুমাত্র *x* নেয়া হলে বিস্তৃতিতে একটি x^n পদ থাকবে। তবে, দ্বিপদী রাশি থেকে *y* এর নির্বাচনের প্রতিটি উপায়ের জন্য $x^{n-2}y^2$ আকারের কয়েকটি পদ থাকবে। অর্থাৎ, অনুরূপ রাশিসমূহ যুক্ত করার পর, $x^{n-2}y^2$ এর সহগের মান হবে একটি *n* সংখ্যক উপাদানের সেট থেকে ঠিক দুইটি উপাদান নির্বাচনের উপায়ের সংখ্যার সমান।

প্রমাণ

সমাবেশগত প্রমাণ

উদাহরণ

নিচের রাশিটি থেকে xy^2 এর সহগের মান নির্ণয় করি

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y) \\ &= xxx + xxy + xyx + \underline{xyy} + yxx + \underline{yxy} + \underline{yyx} + yyy \\ &= x^3 + 3x^2y + \underline{3xy^2} + y^3\end{aligned}$$

সহগের মান $\binom{3}{2} = 3$। কারণ, এখানে একটি x এবং দুইটি y যুক্ত পদের সংখ্যা তিনটি। এগুলো হল,

$$xyy,\ yxy,\ yyx$$

{ 1, 2, 3 } সেটটির তিনটি দুই-উপাদান বিশিষ্ট উপসেট হল,

$$\{2,3\},\ \{1,3\},\ \{1,2\}$$

যেখানে প্রতিটি উপসেট একটি সংশ্লিষ্ট পদে y এর অবস্থান নির্দেশ করে।

সাধারণ ক্ষেত্র

$(x + y)^n$ কে বিস্তৃত করে 2^n পদটিকে $e_1e_2 \ldots e_n$ আকারের পদের সমষ্টি হিসেবে প্রকাশ করা যায় যেখানে প্রতিটি e_i হচ্ছে x অথবা y। উৎপাদক সমূহকে পুনর্বিন্যাস করলে দেখা যায় যে, k এর মান 0 থেকে n এর জন্য প্রতিটি উৎপাদক এর মান $x^{n-k}y^k$ এর সমান। কোন প্রদত্ত k এর জন্য, নিম্নোক্ত উক্তিগুলো ক্রমান্বয়ে প্রমাণ করা যায়:

- বিস্তৃতিতে $x^{n-k}y^k$ এর পুনরাবৃত্তির সংখ্যা
- ঠিক k তম অবস্থানে y ধারণকারী n-আকারের x,y ধারার সংখ্যা
- $\{1, 2, \ldots, n\}$ এর k-উপাদানের উপসেটের সংখ্যা
- $\binom{n}{k}$ (সংজ্ঞা থেকে অথবা একটি সংক্ষিপ্ত সমাবেশীয় যুক্তির সাহায্যে যদি $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ কে $\binom{n}{k}$ বলা হয়)।

যা দ্বিপদী উপপাদ্যকে প্রমাণ করে।

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণ

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দ্বিপদী উপপাদ্যের আরেকটি প্রমাণ রয়েছে। যখন $n = 0$, উভয় পক্ষের যোগফল হয় 1, যেহেতু $x^0 = 1$ এবং $\binom{0}{0} = 1$। এখন মনে করি, কোন প্রদত্ত n এর জন্যেও এদের মান সমান; এখন আমরা $n + 1$ এর জন্যে এটি প্রমাণ করব। এখন $j, k \geqslant 0$ হলে, মনে করি $[f(x, y)]_{j,k}$ দ্বারা $f(x, y)$ বহুপদীর x^jy^k পদের সহগকে নির্দেশ করে। আরোহ বিধি অনুসারে, $(x + y)^n$ হচ্ছে x ও y এর এমন একটি বহুপদী যেখানে $j + k = n$ এর জন্যে $[(x + y)^n]_{j,k}$ এর মান $\binom{n}{k}$ এবং অন্যথায় এর মান 0। নিচের অভেদ থেকে দেখা যায় যে,

$$(x+y)^{n+1} = x(x+y)^n + y(x+y)^n$$

$(x+y)^{n+1}$ x ও y এর একটি বহুপদী, এবং

$$[(x+y)^{n+1}]_{j,k} = [(x+y)^n]_{j-1,k} + [(x+y)^n]_{j,k-1}$$

যেহেতু $j+k=n+1$ হলে, $(j-1)+k=n$ এবং $j+(k-1)=n$। এখন, ডানপক্ষ হচ্ছে

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

প্যাসকেলের অভেদ অনুসারে। [১৪] অপরদিকে, $j+k \neq n+1$ হলে, $(j-1)+k \neq n$ এবং $j+(k-1) \neq n$, অতএব আমরা পাই 0 + 0 = 0। অর্থাৎ

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

যা n এর স্থলে $n+1$ এর আরোহ বিধিকে সমর্থন করে, এবং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুসারে এটি প্রমাণিত হয়।

সরলীকরণ

নিউটনের সাধারণীকৃত দ্বিপদী উপপাদ্য

১৬৬৫ সালের দিকে, আইজ্যাক নিউটন অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা ছাড়া অন্য সকল বাস্তব সংখ্যাকে দ্বিপদী উপপাদ্যে ব্যবহারের জন্য এর সাধারণীকরণ করেন (এই একই সাধারণীকরণ জটিল সূচকের জন্যেও প্রযোজ্য)। এই সাধারণীকরণে, সসীম যোগফলকে একটি অসীম ধারা কর্তৃক প্রতিস্থাপিত করা হয়। এর জন্যে, দ্বিপদী সহগসমূহকে একটি ইচ্ছামাফিক ঊর্ধ্বসূচক দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা প্রয়োজন, যা সাধারণ ফ্যাক্টোরিয়াল সম্পন্ন সূত্র দ্বারা করা সম্ভব নয়। তবে, যেকোনো সংখ্যা r এর জন্যে, বলা যায় যে

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} = \frac{(r)_k}{k!}$$

যেখানে $(\cdot)_k$ হচ্ছে পোখামার প্রতীক, যা এখানে অধোগামী ফ্যাক্টোরিয়ালের প্রতিনিধিত্ব করে। r অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে এটি সাধারণ সংজ্ঞার সাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ হয়। তখন, যদি x ও y পূর্ণসংখ্যা, $|x| > |y|$, [নোট ১] এবং r জটিল সংখ্যা হয়, সেক্ষেত্রে

$$\begin{aligned}(x+y)^r &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^{r-k} y^k \\ &= x^r + r x^{r-1} y + \frac{r(r-1)}{2!} x^{r-2} y^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!} x^{r-3} y^3 + \cdots\end{aligned}$$

যেখানে r একটি অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা, $k > r$ এর জন্যে দ্বিপদী সহগের মান শুন্য, অতএব এই সূত্রটি সাধারণ দ্বিপদী উপপাদ্যে পরিণত হয়, এবং এখানে সর্বোচ্চ $r + 1$ অশুন্য পদ থাকে। r এর অন্যান্য মানের জন্যে সাধারণত এই ধারাটিতে অসীম সংখ্যক অশুন্য পদ থাকে।

উদাহরণস্বরূপ, $r = 1/2$ এর জন্যে নিচের বর্গমূলের ধারাটি পাওয়া যায়:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \cdots$$

$r = -1$ হলে, সাধারণীকৃত দ্বিপদী উপপাদ্যটি জ্যামিতিক ধারার সূত্রে পরিণত হয়, যা $|x| < 1$ এর জন্যে প্রযোজ্য:

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

আরও সাধারণভাবে, $r = -s$ হলে:

$$\frac{1}{(1-x)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s+k-1}{k} x^k$$

অতএব, যখন $s = 1/2$, তখন

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 + \cdots$$

অধিকতর সাধারণীকরণ

সাধারণীকৃত দ্বিপদী উপপাদ্য x এবং y জটিল সংখ্যা হলেও প্রয়োগ করা যায়। এর জন্যে প্রথমে আবারও ধরতে হবে $|x| > |y|$ [নোট ১] এবং $x + y$ ও x এর সূচককে একটি হলোমর্ফিক লগারিদমের শাখা দ্বারা সংজ্ঞায়িত করতে হবে যা x কেন্দ্র ও $|x|$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি উন্মুক্ত চাকতি দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা যায়। সাধারণীকৃত দ্বিপদী উপপাদ্য x ও y বানাখ বীজগণিতের উপাদান হলেও প্রযোজ্য যদি $xy = yx$, x এর মান অশুন্য, ও $||y/x|| < 1$ হয়।

দ্বিপদী উপপাদ্যের একটি সংস্করণ নিম্নের পোখামার প্রতীক-সদৃশ বহুপদী বর্গের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য: একটি প্রদত্ত বাস্তব ধ্রুবক c এর জন্যে, $x^{(0)} = 1$সংজ্ঞায়িত করা হয় এবং $n > 0$এর জন্য$x^{(n)} = \prod_{k=1}^{n}[x + (k-1)c]$ হলে [১৫]

$$(a+b)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(n-k)} b^{(k)}$$

$c = 0$ হলে সাধারণ দ্বিপদী উপপাদ্য পুনরুদ্ধার হয়।

আরও সাধারণভাবে, $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ অনুক্রমের একটি বহুপদীকে **দ্বিপদী** বলা যাবে যদি

- সকল nএর জন্যে, $\deg p_n = n$,
- $p_0(0) = 1$এবং
- সকল x, yও nএর জন্যে, $p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y)$হয়।

বহুপদীসমূহের সীমার মধ্যে একটি অপারেটর Qকে $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ অনুক্রমের বেসিস অপারেটর বলা হয় যদি $Qp_0 = 0$ও সকল $n \geqslant 1$এর জন্য $Qp_n = np_{n-1}$হয়। কোন অনুক্রম $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ বহুপদী হবে যদি ও কেবল যদি এর বেসিস অপারেটর একটি ডেল্টা অপারেটর হয়। [১৬] অপারেটরের পরিবর্তনকে E^a প্রতীকে প্রকাশ করে, উপরে বর্ণিত "পোখামার" বহুপদী বর্গের সাথে সংশ্লিষ্ট ডেল্টা অপারেটরগুলো হচ্ছে $c > 0$এর জন্য $I - E^{-c}$এর পশ্চাদগামী পার্থক্য, $c = 0$হলে এর সাধারণ অন্তরজ এবং $c < 0$হলে $E^{-c} - I$এর সম্মুখগামী পার্থক্য।

বহুপদী উপপাদ্য

দ্বিপদী উপপাদ্যকে দুই এর অধিক পদের যোগফলের সূচকের জন্যেও সাধারণীকরণ করা যায়। এই সাধারণ রূপটি হল

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}$$

যেখানে k_1 থেকে k_m পর্যন্ত অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা সূচকের সকল অনুক্রমের সমষ্টি নেয়া হয় এমনভাবে যাতে সকল k_i এর যোগফল n হয় (বিস্তৃতির সকল পদের জন্য, সূচকের যোগফল অবশ্যই n হতে হবে)। সহগ $\binom{n}{k_1,\cdots,k_m}$সহগগুলো বহুপদী সহগ নামে পরিচিত এবং এদেরকে নিচের সূত্র থেকে পাওয়া যায়

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!}$$

সমাবেশগতভাবে, বহুপদী সহগ $\binom{n}{k_1,\cdots,k_m}$হচ্ছে n-উপাদানের একটি সেট থেকে k_1, ..., k_m আকারের নিচ্ছেদ উপসেটে বিভক্ত করার উপায়।

বহু-দ্বিপদী উপপাদ্য

একাধিক মাত্রায় কাজ করার সময় দ্বিপদী উপপাদ্যের গুণফল নিয়ে কাজ করা প্রায়ই সহায়ক হয়। দ্বিপদী উপপাদ্য অনুসারে এর মান

$$(x_1+y_1)^{n_1}\cdots(x_d+y_d)^{n_d}=\sum_{k_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{k_d=0}^{n_d}\binom{n_1}{k_1}x_1^{k_1}y_1^{n_1-k_1}\ \ldots\ \binom{n_d}{k_d}x_d^{k_d}y_d^{n_d-k_d}$$

এর সমান।

বহু-সূচক প্রতীকের সাহায্যে, এটিকে আরও সংক্ষেপে লেখা যায় এভাবে

$$(x+y)^\alpha=\sum_{\nu\le\alpha}\binom{\alpha}{\nu}x^\nu y^{\alpha-\nu}$$

সাধারণ লিবনিজ নীতি

সাধারণ লিবনিজ নীতি থেকে দুটি ফাংশনের একটি উৎপাদের n-তম অন্তরজ পাওয়া যায় যা দ্বিপদী উপপাদ্যের প্রায় অনুরূপ:[১৭]

$$(fg)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

এখানে, (n) সুপারস্ক্রিপ্ট দ্বারা একটি ফাংশনের n-তম অন্তরজ নির্দেশ করে। যদি $f(x) = e^{ax}$ ও $g(x) = e^{bx}$ হয় এবং তারপর সাধারণ উৎপাদক $e^{(a+b)x}$ কে বাদ দিলে সাধারণ দ্বিপদী উপপাদ্য পাওয়া যায়।

প্রয়োগ

গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

জটিল সংখ্যার জন্য দ্বিপদী উপপাদ্যকে ডি ময়ভার এর সূত্রের সাথে যুক্ত করে সাইন এবং কোসাইন অনুপাতের জন্য গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করা যায়। ডি ময়ভার এর সূত্র অনুযায়ী,

$$\cos(nx)+i\sin(nx)=(\cos x+i\sin x)^n$$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে, ডান দিকের রাশিটিকে বিস্তৃত করা যায় এবং তারপর বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে $\cos(nx)$ ও $\sin(nx)$ এর সূত্র প্রতিপাদন করা যায়। উদাহরণস্বরূপ, যেহেতু

$$(\cos x+i\sin x)^2=\cos^2 x+2i\cos x\sin x-\sin^2 x$$

ডি ময়ভার এর সূত্র থেকে আমরা পাই যে,

$$\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x \quad \text{ও} \quad \sin(2x)=2\cos x\sin x$$

যেগুলো সাধারণ গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত। একইভাবে, যেহেতু

$$(\cos x+i\sin x)^3=\cos^3 x+3i\cos^2 x\sin x-3\cos x\sin^2 x-i\sin^3 x$$

ডি ময়ভার এর সূত্র থেকে পাওয়া যায়

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x \quad \text{ও} \quad \sin(3x) = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$$

সাধারণভাবে,

$$\cos(nx) = \sum_{k \text{ even}} (-1)^{k/2} \binom{n}{k} \cos^{n-k} x \sin^k x$$

এবং

$$\sin(nx) = \sum_{k \text{ odd}} (-1)^{(k-1)/2} \binom{n}{k} \cos^{n-k} x \sin^k x$$

e এর ধারা

প্রায়শই e ধ্রুবকটি নিম্নোক্ত সূত্র দ্বারা প্রকাশ করা হয়

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

এই সুত্রে দ্বিপদী উপপাদ্য প্রয়োগ করে e এর অসীমতক ধারা পাওয়া যায়। বিশেষত:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

এই ধারাটির k তম পদ হল

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$

$n \to \infty$ হলে, ডানদিকের রাশিটির মান 1 এর দিকে অগ্রসর হয়, অতএব

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$$

এর থেকে বোঝা যায় যে, e কে একটি ধারা আকারে প্রকাশ করা যায়:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

তবে, দ্বিপদী বিস্তৃতির প্রতিটি পদ n এর একটি বর্ধিষ্ণু ফাংশন হওয়ায়, এটি মনোটোন অভিসৃতি সূত্র থেকে আসে যেখানে এই অসীম ধারাটির যোগফল হয় e।

সম্ভাব্যতা

দ্বিপদী উপপাদ্য, ঋণাত্মক দ্বিপদী বিন্যাসের সম্ভাব্যতা ভর ফাংশনের সাথে গভীরভাবে সম্পর্কিত। সফলতার সম্ভাব্যতা $p \in [0,1]$ হলে একটি স্বাধীন গণনাযোগ্য বার্নোলি ট্রায়াল $\{X_t\}_{t \in S}$ এর সংগ্রহের প্রতিটি না ঘটার সম্ভাবনা হল

$$P\left(\bigcap_{t \in S} X_t^C\right) = (1-p)^{|S|} = \sum_{n=0}^{|S|} \binom{|S|}{n} (-p)^n$$

এই মানের একটি সম্ভাব্য ঊর্ধ্বসীমা e^{-pn}। [১৮]

বিমূর্ত বীজগণিতে দ্বিপদী উপপাদ্য

সূত্র (1), $xy = yx$ কে সিদ্ধকারী একটি অংশত-চাকতির যে কোন উপাদান x ও y এর জন্য অধিক সাধারণভাবে প্রযোজ্য। পরিবর্তনযোগ্যতার জায়গায় সংশ্লিষ্টতার ব্যবহার, উপপাদ্যটিকে আরও সঠিক করে তোলে।

দ্বিপদী উপপাদ্যকে বহুপদী অনুক্রম $\{ 1, x, x^2, x^3, ... \}$ কে দ্বিপদী প্রকারের মাধ্যমে বিবৃত করা যায়।

আধুনিককালে প্রয়োগ

- কমিক অপেরা দ্য পাইরেটস অফ পেনজ্যান্স এর মেজর-জেনারেল'স গানে দ্বিপদী উপপাদ্যের উল্লেখ রয়েছে।
- শার্লক হোমস প্রফেসর মরিয়ার্টির বর্ণনা দিতে বলেন যে তিনি দ্বিপদী উপপাদ্য সংক্রান্ত একটি গ্রন্থ রচনা করেছেন।
- পর্তুগীজ কবি ফারনান্দো পেসোয়া, ভিন্নার্থক শব্দ অ্যালভারো ডি ক্যাম্পোস ব্যবহার করে, লিখেন যে "নিউটনের দ্বিপদী উপপাদ্যটি ভেনাস ডি মাইলো এর মত সুন্দর। বাস্তবতা হচ্ছে কম লোকই এটি লক্ষ্য করেন।" [১৯]
- ২০১৪ সালের সিনেমা দ্য ইমিটেশন গেমে, অ্যালান টিউরিং ব্লেচলি পার্কে কমান্ডার ডেনিস্টনের সাথে তার প্রথম সাক্ষাতে দ্বিপদী উপপাদ্যের উপর আইজ্যাক নিউটনের অবদানের কথা উল্লেখ করেন।

আরও দেখুন

- দ্বিপদী আসন্ন মান
- দ্বিপদী বণ্টন
- দ্বিপদী বিপরীত উপপাদ্য
- স্টারলিংয়ের আসন্ন মান